Université Claude Bernard Lyon 1 — PCSI L2 UE MATH3

Année 2014-2015

Automne 2014

FICHE TD 2 - Systèmes linéaires, réduction des endomorphismes

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants en utilisant la méthode de pivot de Gauß :

$$\text{a)} \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \\ -3x - 4y + 3z = 0\,. \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 5x + 2y - z = 5 \\ -3x - 4y + 3z = 1\,. \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13\,. \end{cases} \qquad \text{d)} \begin{cases} 2x + y + z + t = 3 \\ x + 2y + z + t = 1 \\ x + y + 2z + t = 2 \\ x + y + z + 2t = 4 \\ x - y + z - t = 0\,. \end{cases}$$

Exercice 2 Résoudre, suivant les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, les systèmes :

$$\text{a)} \begin{cases} x + y + z = \lambda + 1 \\ \lambda x + y + (\lambda - 1)z = \lambda \\ x + \lambda y + z = 1\,. \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} (2-\lambda)x + 2y = 0 \\ x + (2-\lambda)y + z = 0 \\ 2y + (2-\lambda)z = 0\,. \end{cases}$$

Exercice 3 Calculer les inverses des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Résoudre les systémes linéaires suivants :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$D\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix},\qquad D\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\qquad D\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\7\\-4\end{pmatrix}-$$

Exercice 4 En utilisant la méthode de Cramer, calculer la valeur de x dans les systèmes linéaires suivants :

$$\text{a)}\begin{cases}x+2y=4\\2x-y=5,\end{cases}\qquad\qquad \text{b)}\ \begin{cases}x+2y-3z=2\\y=3\\2x+3y-z=1\,.\end{cases}$$

En utilisant la méthode de Cramer, calculer la valeur de y dans les systèmes linéaires suivants :

$$\text{c)}\begin{cases}3x+2y=4\\4x+3y=2,\end{cases}\qquad\qquad \text{d)}\ \begin{cases}x+2y+z=6\\x+y+z=4\\3x+2y+z=8\,.\end{cases}$$

Exercice 5 Soit V un espace vectoriel réel et L un endomorphisme de V. On suppose que L possède une valeur propre non nulle $\lambda\in\mathbb{R}$. Montrer que si L est inversible, alors λ^{-1} est valeur propre de L^{-1}.

Exercice 6 Soit A une matrice 3×3 de valeurs propres $1,2,3$ correspondant respectivement aux vecteurs propres $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$. On suppose que

$$\vec{v}=\vec{b}_1-4\vec{b}_2+3\vec{b}_3.$$

Calculer $A^5\vec{v}$.

Exercice 7 (*Diagonalisation*) Soit $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit L l'endormorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base B est donnée par :

$$A=L_B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base $B'=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de L est une matrice diagonale $D=L_{B'}$ que l'on précisera.
2. Donner les équations dans la base B de 3 plans vectoriels stables par L.

Exercice 8 1. Quelles sont les valeurs propres des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Lesquelles de ces matrices sont diagonalisables ?

Exercice 9 (*Application aux suites récurrentes*) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Trouver une base $B' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ formée par des vecteurs propres de A et préciser une matrice diagonale semblable (conjuguée) à A.
2. Donner la matrice de passage P de la base canonique $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ de $\mathbb{R}^2$ à la base B' et calculer P^{-1}.
3. Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite réelle déterminée par ses 2 premiers termes u_0 et u_1 et par $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ pour tout $n \geqslant 2$.
   En remarquant que pour tout $n \geqslant 2$, $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$, exprimer u_n en fonction de u_0 et u_1 pour $n \geqslant 2$.